**Axiomática y Algebra Estructural en la Obra de David Hilbert**

por Leo Corry

-----------------------------------------------------------------------------------------------------

## Abstract

El presente artículo discute las contribuciones de David Hilbert a la teoría de invariantes algebraicos, a la teoría de los cuerpos de números algébricos, y la investigación de los fundamentos de la geometría. Esta discusión muestra que, aunque Hilbert avanzó muchos de los elementos que irían a constituír la base del nuevo enfoque estructural del álgebra, él mismo nunca adoptó tal enfoque, ni sugirió que sería conveniente adoptarlo.

The present article discusses David Hilbert's contributions to the theory of algebraic invariants, to the theory of algebraic number fields, and to the study of the foundations of geometry. The discussion shows that, although Hilbert advanced many of the central elements that would eventually form the basis of the new, structural approach to algebra, he himself never adopted such an approach, nor suggested that it would be convenient to adopt it in algebraic research.

-----------------------------------------------------------------------------------------------------

En 1930, el matemático holandés Bartel Leendert van der Waerden (1903- ) publicó su hoy en día famoso libro de texto, *Moderne Algebra*. Esta publicación marcó el comienzo de una nueva era en la investigación algebraica, caracterizada por el dominio del concepto de "estructura algebraica" como foco de esta disciplina. Van der Waerden basó su libro en las lecciones de Emmy Noether (1882-1935) y de Emil Artin (1898-1962), a las cuales había asistido durante los años anteriores en Göttingen y Hamburgo respectivamente [Véase van der Waerden 1975]. El desarrollo de la noción de estructura algebraica y del concomitante enfoque estructural del álgebra fue en proceso complejo cuyos orígenes puede sen trazados por lo menos hasta la mitad del siglo pasado, y que culminó precisamente en la nueva concepción disciplinaria del álgebra representada por el libro de van der Waerden.[1] La esencia de este proceso puede comprenderse al examinar el tipo de cambios producidos en la teoría de los ideales desde su creación por Richard Dedekind (1831-1916), a partir de 1871, y hasta su reformulación a manos de Emmy Noether en 1921. La teoría de los ideales de Dedekind era una teoría matemática clásica del siglo diecinueve, cuyo tema de interés era uno de los objetos "concretos" de la matemática: el sistema de los números algebraicos y el problema de su factorización única en factores primos.[2] La teoría de Noether, por el contrario, era una teoría abstracta, que definía las propiedades de descomposición de anillos generales, y que sirvió para unificar varias teorías previamente existentes, especialmente la teoría algebraica de los números y la teoría de los polinomios.

El desarrollo del enfoque estructural en algebra implicó no sólo un crecimiento impresionante en la cantidad de los teoremas demostrados, de los ejemplos conocidos en detalle, y de los nuevos conceptos introducidos para estudiar los dominios matemáticos investigados. El implicó, por encima de todo, un cambio profundo en la concepción misma del alcance y de los fines de la investigación algebraica. Este tipo de cambio es lo que, en lo que sigue, llamaremos cambio en las imágenes de las matemáticas (en oposición al simple crecimiento del cuerpo del conocimiento matemático).[3] Para poder entender adecuadamente el desarrollo del enfoque estructural del álgebra es necesario enfatizar, junto con el crecimiento del cuerpo del conocimiento relevante, el cambio en las imágenes de las matemáticas que contribuyó a él.

Pocos relatos del desarrollo de cualquier disicplina matemática desde fines del siglo pasado pueden considerarse completos si no analizan el papel que la obra de David Hilbert jugó en ellos. El desarrollo del enfoque estructural del álgebra no es una excepción a esta regla.[4] David Hilbert (1862-1943) fue el matemático más importante de su momento, y el instituto matemático de Göttingen—primero bajo la dirección de Felix Klein (1849-1925) y luego con Hilbert—se convirtió en el gran centro mundial de las matemáticas hasta el ascenso del nazismo al poder en Alemania.[5] En Göttingen se había desarrollado también la primera parte de la carrera científica de Dedekind, años antes de la llegada de Hilbert. Posteriormente, Emmy Noether—quien había sido invitada a Göttingen por Hilbert en 1915—desarrolló allí su propia obra de investigación algebraica.

Dado el gran número de dominios matemáticos que la obra de Hilbert cubre, una apreciación justa de su influencia sobre el pensamiento algebraico moderno debería realizarse como parte de su influencia general sobre las matemáticas del siglo veinte. Para los fines del presente artículo, sin embargo, nos limitaremos a mencionar dos campos que pueden ser considerados como más propiamente algebraicos dentro de su trabajo: la teoría de invariantes y la teoría algebraica de los números. Luego discutiremos el enfoque axiomático de Hilbert, concentrándonos especialmente en sus imágenes de las matemáticas, tal y como se manifiestan en estos trabajos. Veremos de esta manera que, aunque muchos de los ingredientes importantes del enfoque estrucutral del álgebra pueden reconocerse retrospectivamente en estos trabajos de Hilbert, su propia concepción de esta disciplina permaneció esencialmente igual a la que la caracterizó durante todo el siglo diecinueve: la noción de estructura algebraica es ajena a los trabajos del mismo Hilbert.

**Hilbert como estudiante y como docente**

Para poder entender adecuadamente la obra matemática de Hilbert, es necesario discutir el tipo de atmósfera matemática dentro la cual sus ideas se desarrollaron. Los estudios de Hilbert y toda la primera parte de su carrera investigativa transcurrieron en su ciudad natal de Königsberg excepto por un breve período de viaje, tal como se acostumbraba en la época, en el cual Hilbert visitara a Klein en Leipzig y a Charles Hermite (1822-1901) en Paris. La tradición de análisis y física matemática que se había desarrollado en Königsberg bajo el liderazgo de Carl Gustav Jacobi (1804-1851), Franz Neumann (1798-1895) y, algo posteriormente, Friedrich Richelot (1808-1875), fue una de las principales fuerzas que conllevaron al gradual dominio de la escena matemática por Alemania hacia finales del siglo.[6]

En Königsberg, uno de los más influyentes maestros de Hilbert fue Heirich Weber (1842-1913). Los variados intereses matemáticos de Weber cubrían campos tan diversos como la teoría de polinomios, las funciones elípticas y la física matemática. En este último dominio Weber realizó investigaciones en la teoría del calor, electricidad, y el movimiento de cuerpos rígidos en líquidos. En 1882 Weber publicó en colaboración con Richard Dedekind un importantísimo trabajo sobre los fundamentos de la teoría de las funciones algebraicas [Dedekind y Weber 1882]. En este trabajo, Weber y Dedekind desarrollaron la teoría de una manera novedosa, que consistió en sacar a la luz las similaridades conceptuales entre este dominio y el dominio de los números algebraicos. Weber y Dedekind usaron con gran efectividad el concepto de ideal, que Dedekind había creado para tratar el problema de la factorización en los cuerpos de números algebraicos.[7] Mientras Weber escribía este trabajo, Hilbert asistía a sus lecciones en Königsberg, y éstas causaron en él una profunda y duradera impresión. La exploración de este tipo de analogías subyacentes a dos dominos matemáticos aprentemente alejados—como la teoría de funciones y la teoría de los números algebraicos—se convertiría también en un principio fundamental de la práctica del mismo Hilbert.

La tesis doctoral de Hilbert fue dirgida por Ferdinand Lindemann (1852-1939). Lindemann, quien había sido alumno de Klein, es recordado hoy en día más que todo por su prueba de la trascendentalidad de p. La tesis de Hilbert consideró un problema de la teoría de invariantes algébricos. Este sería también el campo en el que toda la primera fase de la carrera investigativa de Hilbert se iba a concentrar.

Pero la influencia más decisiva sobre la formación del horizonte matemático de Hilbert en su años de Königsberg, provino de su entrañable amistad con dos jóvenes compañeros: Adolf Hurwitz (1859-1919), quien en un principio fue maestro de Hilbert y luego su colega, y Hermann Minkowski (1864-1909). Antes de aceptar una cátedra especialmente establecida para él en 1894 en Königsberg, Hurwitz había estudiado con Klein en Leipzig y luego había recibido su habilitación en Göttingen. De este modo, Hurwitz llegó a conocer a fondo el tipo de intereses matemáticos y el tipo de técnicas que dominaban la investigación contemporánea de esos dos importantes centros. Hurwitz se desempeñó ocho años en Königsberg antes de seguir hacia Zurich. Su influencia fue decisiva en lo que respecta a la creación de una muy amplia gama de intereses científicos en el estudiante, y luego en el joven profesor Hilbert.

Las obras publicadas por Hilbert entre 1885 y 1893 tocan un único campo de investigación: la teoría de los invariantes algebraicos. Sin embargo, la lista de sus publicaciones descubre tan sólo un limitado panorama del tipo de intereses que Hilbert, siguiendo la rica tradición dentro de la cual fue educado, cultivó en estos años. Estos intereses se manifiestan más claramente al examinar la lista de las muchas materias que enseñó en los años de profesorado en su Alma Mater, años en que se destacó como profesor laborioso y dedicado. En efecto, una apreciación balanceada del mundo matemático de Hilbert y de su influencia no es posible, si no se toman en cuenta sus labores docentes, primero en Königsberg y sobre todo en Göttingen desde 1895.

Hilbert supervisó no menos de sesenta y ocho estudiantes doctorales entre 1898 y 1914. Como es bien sabido, en el famoso instituto matemático creado en Göttingen por Felix Klein, Hilbert se convirtió en el líder de un centro científico único en su género, que reunió una galería de figuras de la primera categoría. Sería difícil exagerar la influencia del pensamiento de Hilbert sobre toda la producción científica que salió de dicho centro en los años de su dirección. Afortunadamente es posible documentar con bastante precisión el contenido de los cursos dictados por Hilbert en Göttingen. Estos cursos nos dan una idea clara de la evolución de sus ideas en varios contextos. En general, sus cursos en Göttingen no se basaban en una presentación estructurada de los resultados de teorías ya establecidas y claramente fundamentadas. Por el contrario, Hilbert aprovechaba la oportunidad de estos cursos para explorar nuevas ideas y para pensar en voz alta sobre los problemas que en dicho momento ocupaban su mente. Por lo menos desde 1902, Hilbert acostumbraba escoger uno de sus estudiantes para tomar apuntes durante las lecciones. Estos apuntes eran luego reelaborados de manera coherente, que Hilbert mismo revisaba y comentaba, para ser colocados en la sala de lectura del instituto, el famoso *Lesezimmer* que constituía el verdadero corazón matemático de la universidad. Los estudiantes podían consultar estas notas, que les servían como texto del curso.[8] Hoy en día esas mismas notas sirven de documento invaluable para el historiador que intenta reconstruír la época.

La importancia acordada a las lecciones como oportunidad inigualable para la libre exploración de nuevas ideas fue destacada por el mismo Hilbert muchos años después con las siguientes palabras:

> La conexión más íntima que puede concebirse entre investigación y enseñanza se convirtió en uno de los factores decisivos de mi actividad matemática. El intercambio de ideas científicas, la comunicación de lo que yo mismo había descubierto y la elaboración de lo que había escuchado, fueron desde mis años iniciales en Königsberg una piedra angular de mi trabajo científico ... Mis cursos, y sobre todo mis seminarios, estaban guiados por la idea de no presentar el material de manera estandard y lo más pulida posible—esa manera de enseñar que les permite a los estudiantes llevar cuadernos limpios y ordenados. Antes que todo, siempre traté de iluminar los problemas y las dificultades, y de ofrecer un puente conduciente a los problemas actualmente no resueltos. Era común que en el curso de un semestre, yo cambiase totalmente el programa de un curso avanzado, al querer discutir un problema que me encontraba investigando en aquel momento y que estaba lejos de haber alcanzado su formulación definitiva. [Hilbert 1971a, 79]

Esta descripción, que queda absolutamente confirmada al revisar el contenido de las ya mencionadas notas de sus cursos, debe recordarse al intentar reconstruír el desarrollo de las ideas de Hilbert. En particular, ella nos lleva a reconsiderar ciertas opiniones aceptadas concernientes a la periodización de su trabajo. En un frecuentemente citado pasaje, Hermann Weyl [1944, p. 619], uno de los estudiantes más cercanos a Hilbert y su sucesor en Göttingen desde 1930, declaró que la obra de Hilbert se había desarrollado en cinco diferentes períodos, claramente discernibles: (1) Teoría de invariantes (1885-1893); (2) Teoría de cuerpos de números algébricos (1893-1898); (3) Fundamentos, (a) de geometría (1898-1902), (b) de matemáticas en general (1922-1930); (4) Ecuaciones integrales (1902-1912); (5) Física (1910-1922). Esta periodización refleja sin duda la división temporal de las obras publicadas por Hilbert. Pero ella dice mucho menos sobre la evolución de su pensamiento, y sobre los esfuerzos dedicados simultaneamente al estudio y la comprensión de otros dominios matemáticos. La imágen que revela la lista de sus cursos dictados en Göttingen resulta ser mucho más compleja e interesante que la sugerida por Weyl en su obituiario de Hilbert. Para los propósitos específicos del presente artículo, nos referiremos a los cursos de la época temprana de Hilbert para discutir los orígenes de su concepción axiomática y la aplicación de esta última en sus trabajos en el campo del álgebra.

**Teoría de los Invariantes Algebraicos**

La primera fase de la carrera investigativa de Hilbert—de 1885 a 1893—estuvo claramente dominada por una sola disciplina: la teoría de los invariantes algebraicos. Esta teoría, que constiutyó uno de los campos más activos de investigación matemática en la segunda mitad del siglo pasado, había sido desarrollada originalmente en Inglaterra desde 1845, a manos de Alfred Cayley (1821-1895) y James Joseph Sylvester (1814-1897). Posteriormente, el centro de gravedad se trasladó a Alemania, donde Rudolf Alfred Clebsch (1833-1872) creó una poderosa escuela.[9]

Paul Gordan (1837-1912) se convirtió rapidamente en el gran maestro de esta disciplina, siendo uno de sus mayores logros la demostración del teorema de finitud. Dado un sistema binario de grado arbitrario, Gordan mostró en 1868—a través de cálculos enormememente largos y complicados, como era tradicional en la escuela de Clebsch—cómo construir un subsistema finito que genere el sistema dado [Gordan 1868]. Su demostración fue mejorada y generalizada en ciertos aspectos en los años subsiguientes, pero la completa generalización del resultado a formas de grado arbitrario y para cualquier número de variables quedo no resuelto hasta 1888, año en que Hilbert hizo su triunfal entrada en la escena matemática.[10]

Hilbert demostró en 1888 la existencia de una base finita en el caso general, de manera breve, muy elegante y sucinta, por medio de una reducción al absurdo. Una demostración de existencia de este tipo constiutyó una innovación absoluta, y las reacciones negativas no se hicieron esperar. La reacción inicial del mismo Gordan ha entrado a la mitología matemática, siendo repetidamente citado como quien exclamó: "Esto no es matemática; ésto es teología."[11] Sin embargo, al cabo de un tiempo la demostración de Hilbert fue aceptada como cosa normal, inclusive por el mismo Gordan, quien hasta sugirió como mejorarla tecnicamente.

La contribuicón de Hilbert a la teoría de invariantes consiste ante todo en haber introducido métodos aritméticos a este dominio. De esta manera, Hilbert estaba siguiendo el camino que su maestro Weber había tomado en su trabajo conjunto con Dedekind en teoría de funciones. En 1893 Hilbert resumió sus logros en este campo, indicando que éstos habían transformado la teoría en una rama subsidiaria de la teoría de los cuerpos de funciones, de manera similar a cómo la teoría de los cuerpos ciclotómicos había sido transformada en una dependencia de la teoría de los cuerpos de números algebraicos [Hilbert 1893, 287].

Hilbert mismo fue el primero en formular una evaluación histórica del significado de su trabajo en invarianates. En un artículo leído en 1893 en su nombre en el congreso internacional de matemáticos en Chicago, Hilbert mantuvo que toda teoría matemática atraviesa tres etapas en su desarrollo: la ingenua, la formal y la crítica. En esta teoría, en particular, los trabajos de Cayley y Sylvester constituían la primera, mientras que los de Clebsch y Gordan formaban parte de la segunda. Hilbert se declaraba a sí mismo como representante único de la tercera. Más aún, Hilbert consideraba haber resuelto el problema central de la disicplina y con ello haber culminado toda investigación importante en ella [Hilbert 1896, 383]. En efecto, Hilbert mismo abandonó despué de ésta fecha la investigación de los invariantes [Blumenthal 1935, 395]. Este juicio de Hilbert sobre la muerte de la teoría ha sido repetido innumerables veces y, más aún, la supuesta defunción de este campo de investigación algebraico ha sido visto como la apertura definitiva del camino al ascenso de la nueva álgebra [Kline 1972, 931; Reid 1970, 38; van der Waerden 1933, 401].

Sin embargo, a realidad histórica fue un tanto diferente. Aunque el número de matemáticos activos en este campo de investigación se redujo considerablemenete a fin de siglo, él siguió vivo y en estado de producción.[12] Aún en 1933 vemos la publicación de libros de texto que siguen usando los métodos computacionales de Clebsch y Gordan [Study 1933]. De hecho, en la famosa lista de problemas que Hilbert presentó en 1900 (y de la cual diremos algo más en lo que sigue), el problema catorce se refiere a una prueba de finitud de cierto tipo de invaraiantes. En realidad, relativamente pocos esfuerzos fueron dedicados a éste problema hasta los años cincuenta del presente siglo.[13]

El tipo de analogía conceptual que Hilbert indicó, entre los problemas básicos de la teoría de los números y la de los invariantes, y el la forma en que uso herramientas desarrolladas en el primero para resolver un problema central del segundo, indicaron una dirección que sería significantemente desarrollada como parte del enfoque estructural del álgebra. Sin embargo, hay que tener muy claro que Hilbert mismo siempre concibió su labor en la teoría de invarianates dentro de la imagen clásica de esta disicplina. Las propiedades de las formas polinomiales con las que trabajó, las consideró invariablemente como derivadas de aquéllas del cuerpo de los números complejos. Su jerarquía conceptual estaba claramente establecida y nunca cambió: los números reales y complejos son un ente matemático concreto, de cuyas porpiedades fundamentales se derivan las de los otros tipos de constructos matemáticos. En este sentido, el concepto de estructura algebraica como base de la investiación en esta disciplina es claramente ajeno a esta etapa de la investigación de Hilbert.

**Cuerpos de Números Algebraicos**

Entre 1892 y 1899 el principal campo de investigación de Hilbert fue la teoría de los cuerpos de números algebraicos. Aunque Hilbert abandonó después de 1893 la investigación de los invariantes, el nuevo dominio que abordó no implicó en modo alguno una ruptura total con su pasado. En efecto, Hilbert ya había dictado cursos en Königsberg sobre la teoría algebraica de los números y, más aún, al trabajar los invariantes, como ya se dijo, él había utilizado técnicas que fueron originalmente introducidas en el estudio de este segundo dominio de trabajo.

El estudio sistemático de la factorización de los números algebraicos empezó a principios del siglo diecinueve con el trabajo de Gauss (1777-1855) en los así llamados enteros gaussianos. Una importante contribución a esta disciplina provino de Edwrad Ernst Kummer (1810-1893), quien en 1847 comenzó a desarrollar su teoría de los números primos ideales. Estos le permitieron generalizar el teorema de factorización única al dominio de los enteros ciclotómicos. Dedekind y Leopold Kronecker (1823-1891) produjeron de forma independiente generalizaciones de la teoría de Kummer que probaron ser válidas en dominions cualesquiera de enteros algebraicos. Sus teorías, conocidas como teoría de ideales y teoría de divisores respectivamente, constituyeron la cumbre de la investigación de los números algebraicos en el siglo diecinueve. Los dos matemátcos, sin embargo, enfocaron el problema desde perspectivas totalmente diferentes. El enfoque de Dedekind era mucho más conceptual, mientras que el de Kronecker era mucho más algorítmico.[14] La teoría de factorización en una anillo abstracto que Noether desarrollaría en los años veinte fue una elaboración directa de los métodos introducidos por Dedekind. La enorme popularidad alcanzada por la obra de Noether significó, retrospectivamente, el triunfo del enfoque de Dedekind a la teoría de los números sobre el de Kronecker. Uno de los factores más decisivos que intercedió en este proceso fue la contribución de Hilbert a la teoría de los números.

Al comenzar Hilbert su trabajo en esta disciplina, las técnicas desarrolladas por Dedekind y Kronecker no eran aún comunmente conocidas por el público matemático en general. La causa de esto residía parcialmente en lo novedoso e idiosincrático de los enfoque adoptados por cada uno de ellos. Otra causa de ello era la dificultad intrínseca de sus trabajos [Blumenthal 1935, 397]. En 1893 la asociación de matemáticos alemanes (*DMV*) comisionó a Hilbert y a Minkowski la preparación de un recuento sistemático y comprensivo del estado de desarrollo actual de la teoría de los números, para el uso de la comunidad matemática en general. El mismo hecho de la comisión indica de por sí que Hilbert era considerado a la sazón como una autoridad en el campo, aún sin haber publicado ninguna obra mayor. Minkowski, quien se había destacado en teoría de números desde el comienzo de su carrera, debería escribir un volumen sobre la teoría de los enteros racionales. Hilbert, por su parte, debería porducir un sumario de los resultados obtenidos por Kummer, Dedekind y Kronecker en sus trabajos sobre los cuerpos de números algebraicos. A fin de cuentas, Minkowski resultó estar tremendamente ocupado con su propio libro sobre la geometria de los números y debió abandonar el proyecto. Hilbert culminó la parte que le fue encomendada y la publicó en 1897 [Rüdenberg & Zassenhaus (eds.) 1973, 57 ff..].

El reporte sobre los números de Hilbert—o *Zahlbericht* como llegó conocerse— no era un recuento en el sentido usual de la palabra. Hilbert presentó en efecto la visión sistemática y comprensiva que le fue encomendada, pero en realidad hizo mucho más que eso, contribuyendo con una cantidad enorme de nuevos y significativos relsultados originales. Hilbert adoptó básicamente el enfoque de Dedekind. Como el *Zahlbericht* se transformó en una obra de referencia estandard en esta disciplina [Weyl 1944, 626], la publicación del reporte resultó ser un factor decisivo en el domino de este enfoque sobre el de Kronecker.

Lo que nos interesa averiguar sobre el *Zahlbericht* en el presente de artículo es la manera en que la noción de una estructra algebraica aparece en él. El significado de haber adoptado el enfoque de Dedekind como guía a su trabajo fue el concentrarse en los cuerpos de números como el principal objeto de investigación. Pero es importante subrayar que se trata aquí de los cuerpos entendidos como un subconjunto claramente caracterizado del cuerpo de los complejos, y en ningún caso de cuerpos abstractamente considerados. Este punto es central para entender el enfoque de Hilbert y el proceso de consolidación del enfoque estructural, que vino posteriormente a su obra. Si bien es cierto que Weber había definido ya en un artículo de 1893 tanto grupos como cuerpos de una manera totalmente abstracta [Weber 1893], la mera posibilidad técnica que esta definición proporcionaba de empezar a usar estos conceptos abstractos como base del discurso algebracio, no se actualizó de inmediato en practica matemática corriente. Es decir, pasaron todavía cerca de treinta años hasta que la imagen básica del álgebra se transformara de tal modo, que la noción de estructura algebraica, basada en al definición abstracta de estos conceptos, emergiera como la imagen aceptada de esta disciplina [Corry 1990]. No es que Weber mismo y posteriormente Hilbert no conocieran esta posibilidad, sino que sus propias imágenes del conocimiento matemático no los llevaron a desarrollarla de la manera en que se hizo desde los años veinte en adelante.

Esta actidud de Hilbert queda claramente evidenciada al analizar los diferentes roles que en el *Zahlbericht*, siguiendo los enfoques de Dedekind y de Weber, él atribuyó a los cuerpos y a los grupos, considerándolos a través de su práctica matemática como entes de naturaleza diferente. Así, mientras que los cuerpos, como ya se dijo, son el principal objeto de estudio, y son vistos como entes matemáticos concretos—subconjuntos claramente identificables de números complejos cuyas propiedades la teoría de los números investiga—los grupos proveen una de las herraminetas básicas con la cual Hilbert realiza este estudio. Los grupos son por tanto una idea subsidiaria en la teoría, y claramente grupos y cuerpos *no* son visto como dos manifestaciones diferentes de una misma noción matemática general.

También es relevante observar de que manera Hilbert hace uso de otro de los conceptos que posteriormente vino a identificarse como una instancia más de la noción general de estructura algebraica: el anillo. En el *Zahlbericht*, Hilbert los define de la manera siguiente:

> Sean *q*,*m*.... una colección cualquiera de números algebraicos, cuyo domino de racionalidad es un cuerpo *k* de grado *m*, entonces, el sistema de funciones enteras de *q*,*m*,... con coeficientes enteros se llamará "anillo de números", o "anillo", o "dominio de integridad".[Hilbert 1897,121]

Es claro que tan sólo un número múy limitado de anillos en el sentido actual del término queda incluído en esta definición, totalmente condicionada por el marco numérico en el cual aparece.

El concepto general de un anillo abstracto sería introducido y elaborado sólo a partir de 1914 en la obra de Abraham Frankel, y su concepción más general como otra instancia de estructura algebraica aparecería desde 1921 en los trabajos de Emmy Noether.[15]

Estos anillos de Hilbert aprecen aquí de manera sumamente limitada. Lo que es más intersante aún, es que Hilbert no usó de manera alguna este concepto, o el de ideal de anillo asociado a él, en su otro campo de trabajo: la teoría de polinomios. Los cuerpos de Hilbert no son grupos a los cuales se les ha añadido una operación adicional, ni son sus anillos cuerpos que no satisfacen una de las propiedades de la división. Tampoco sus ideales son subconjuntos especiales de ciertos anillos. Los ideales de Hilbert, como para Dedekind antes de él, son colecciones de enteros algebraicos que pueden ser utilizadas para estudiar propiedades de factorización en los cuerpos. En resumen, la idea del álgebra como estudio de un jerarquía de estructuras es ajena a la concepción de Hilbert, a pesar de que muchos de los conceptos básicos aparecen separadamente en su obra. Este juicio es válido no sólo en los que respecta al *Zahlbericht*, sino también a su artículo al respecto en la famosa Enciclopedia de la Ciencias Matemáticas [Hilbert 1900a], editada por Klein, así como en otros importantes artículos que Hilbert publicó en este campo de trabajo [Hilbert 1898; 1899a].

Debe recalcarse, sin embargo, que esta evaluación no implica en forma alguna un juicio sobre las capacidades de abstracción o de invención de Hilbert. Por el contrario, todo lo que se quere indicar aquí es el tipo de intereses matemáticos que guió su obra, o como dijimos anteriormente, se intenta entender sus imagenes del conocimiento matemático. El ascenso del álgebra estructural se caracterizó prescisamente por la adopción de una imágen diferente a la clásica, de la cual Hilbert fue, durante toda su carrera, uno de los más prominentes exponenetes.

## El Enfoque Axiomático de Hilbert

En el semestre de invierno de 1898-99 Hilbert dictó por primera vez en Göttingen un curso sobre los fundamentos de la geometría. Su interés en este campo pareció a muchos siginificar un marcado corte con los dos dominios en los cuales había sobresalido con su investigaciones desde 1885, fecha en que completó su disertación doctoral: la teoría de invariantes y la teoría algebraica de números.[16] Ya el mero anuncio del curso sorprendió a muchos en Göttingen [Blumenthal 1935, 402]. Pero en realidad, las cuestiones de fundamentos de la geometría habían ocupado los pensamientos de Hilbert desde hacía bastante tiempo, y de hecho él ya había dictado cursos similares en Königsberg.[17] Para enetender la concepción axiomática de Hilbert, es necesario decir algunas palabras sobre el trasnfondo histórico de su interés en este tipo de problemas matemáticos.

En 1882 Moritz Pasch (1843-1930) publicó su libro *Vorlesungen über neuere Geometrie*, (Lecciones de Geometría Nueva) [Pasch 1882] en el cual presentaba un tratamiento axiomático de la geometría poryectiva. Hacia fines del siglo diecinueve, este tipo de geometría atrajo la atención de un número creciente de matemáticos. Antes de Pasch, August Ferdinand Möbius (1790-1868), Jakob Steiner (1796-1863), y Christian von Staudt (1798-1867) habían intentado elucidar, en sus respectivos trabajos, la relación entre la geometría euclídea y la proyectiva [Torreti 1978, 44-53]. Felix Klein—basado en ideas desarrolladas previamente por Arthur Cayley[18] y consciente de la independencia del axioma de las paralelas—reformuló el problema básico en términos de independencia axiomática: la geometría proyectiva debería ser axiomaticamente definida, de manera tal que las varias geometrías métricas puedan ser derivadas de aquélla por adición de nuevos axiomas [Klein 1873]. Klein mismo no tuvo gran éxito en la implementación de estas ideas pero ellas sirvieron de base para trabajos posteriores, como el de Pasch.[19]

En la reconstrucción axiomática de Pasch, una vez que se han postulado los axiomas, todos los demás resultados de la geometría proyectiva deben ser derivados por estricta derivación lógica y sin ningún recurso a la intuición espacial, a diagramas de algún tipo, o a las propiedades de las figuras consideradas. Pero para Pasch—y esto debe ser acentuado—la geometría debe ser vista como parte de las ciencias naturales, cuyas verdades se refieren al mundo exterior. Los axiomas, en esta concepión, expresan verdades *empíricas* básicas, que son derivadas directamente de la experiencia. Para Pasch, mientras que la *derivación* de teoremas es puramente lógica, el *significado* mismo de los axiomas es puramente geométrico y no puede ser entendido sin recurso a los diagramas de los cuales ellos son derivados [Contro 1976, 284-289; Nagel 1939, 193-199; Torreti 1978, 210-218].

Dos líneas de desarrollo se derivaron del trabajo de Pasch: una en Italia, la otra en Alemania. La primera de ellas es la asociada al trabajo de Giuseppe Peano (1858-1930). Peano era un matemático competente, con significantes contribuciones en análisis, incluyendo un importante libro de texto en este campo [Kennedy 1980; Segre 1994]. Pero además de estas actividades matemáticas comunes, Peano dedicó muchos de sus esfuerzos a avanzar la causa de los lenguajes internacionales y a desarrollar un leguaje conceptual que permitiese un tratamiento completamente formal de las demostraciones matemáticas. En 1889 Peano aplicó exitosamente ese lenguaje a la aritmética, publicando en esta oportunidad sus famosos postulados para definir los números naturales. El systema de axiomas de Pasch ofrecía un significativo desafío al lenguaje artificial de Peano. Peano aceptó este desafío, poniendo especial énfasis en estudiar la relación entre los términos geométricos y los lógicos, tal y como aparecen en la estructura deductiva de la geometría. Peano intentó codificar ésta última en su propio lenguaje artificial. Como parte de estos esfuerzos, él introdujo el concepto de sistema independiente de axiomas, es decir, un sistema compuesto por axiomas cada uno de los cual no es una consecuencia lógica de los otros. El aplicó este concepto a su propio sistema de axiomas, que no eran sino una modificación ligera de los de Pasch. La manera peculiar en que Peano trató los sistemas de axiomas, así como la importancia atribuída a la búsqueda de sistemas de axiomas independientes es similar en muchos aspectos a el tratamiento desarrollado posteriormente por Hilbert, pero Peano jamás abordó en sus propios trabajos la prueba completa de la independencia de tales sistemas [Torreti 1978, 221]. Aunque Peano debe ser considerado como un gran innovador en muchos aspectos, su insistencia en el análisis lógico de la estructura deductiva de las teorías matemáticas no debe guíarnos a clasificarlo como un formalista o como un logicista en el sentido actual de estos términos. Como Pasch antes de él, Peano concebía las ideas matemáticas como derivadas de la experiencia empírica [Kennedy 1981, 443].

Varios matemáticos italianos, influenciados por las ideas de Peano, publicaron algunos trabajos semejantes, analizando la estructura lógica de los fundamentos de la geometría. Entre ellos cabe mencionar a Mario Pieri (1860-1913), quien hizo mucho por promover la idea de la geometría como un sistema hipotético-deductivo, introduciendo para su estudio el concepto de "independencia ordinal," un tanto más limitada que la introducida con anterioridad por Peano. Giuseppe Veronese (1845-1917) fue el primero que desarrolló de forma sistemática el estudio de la posibilidad de una geometría no-arquimídea [Veronese 1891]. El demostró la independencia del postulado de Arquímides con relación a los otros postulados de la geometría.[20]

La corriente de pensamiento que se desarrolló en Alemania siguiendo a Pasch elaboró más directamente la línea matemática que originalmente había conducido a los logros de éste. Esta línea estaba motivada directamente por consideraciones matemáticas propiamente dichas, antes que por intereses lógicos o metodológicos. Una pregunta fundamental aboradad por Pasch en su trabajo había sido la elucidación del rol jugado por la continuidad en geometría. Aún seguía sin decidirse la pregunta, si la continuidad debería ser considerada como inherente a la idea misma del espacio, o si por el contrario ella podría reducirse a conceptos más elementales. Klein y Wilhelm Killing (1847-1923) elaboraron la primear de estas alternativas, mientras que Hermann Ludwig Wiener (1857-1939) y Friedrich Schur (1856-1932) exploraron sistematicamente la segunda [Contro 1976, 292-294].

Desde sus días de estudiante en Königsberg, Hilbert llegó a conocer a fondo la tradición geométrica que dió origen al trabajo de Pasch y que posteriormente se desarrolló a partir de éste último. Por otro lado, Hilbert seguramente estaba al tanto de los logros de la escuela italiana, aunque es difícil determinar con certeza cuáles de sus trabajos leyó y en qué medida éstos influenciaron su pensamiento [Toepell 1986, 9-15 & 55-57]. En sus años en Königsberg, la geometría no llegó a constituír el foco central de los intereses de Hilbert, pero él dictó varios cursos en esta materia. Al preparar sus lecciones, Hilbert estudió detalladamente la obra de Pasch concerninente a la geometría proyectiva. Hilbert reconoció el inmenso valor del tratamiento postulacional de Pasch, pero al mismo tiempo fue capaz de identificar algunas de sus limitaciones. En particualr, Hilbert señaló algunas redundancias que afectaban a su sistema de axiomas. Hilbert percibió con claridad que la labor de establecer el mínimo sistema de suposiciones del cual la geometría toda podría ser derivada, no había sido aún completamente realizada [Toepell 1986, 45].

La influencia de esta tradición matemática alemana, con su claro componente empiricista en la concepción de la geometría, puede constatarse en el pensamiento axiomático de Hilbert desde la más temprana evidencia escrita con la que contamos. Esta evidencia indica sin lugar a dudas que al preparar sus lecciones en Königsberg Hilbert veía la geometría—a diferencia de otras ramas matemáticas—como una ciencia *natural*, en que la intuición sensorial juega un papel decisivo. En el manuscrito de un curso sobre geometría proyectiva dictado en Königsberg en 1891 leemos:

> La geometría es la ciencia que investiga las propiedades el espacio. Ella difiere esencialmente de los dominios puros de la matemática, tales como la teoría de los números, el ágebra o la teoría de las funciones. En éstas últimas, los resultados se obtienen a través del pensamiento puro. La situación es completamente diferente en el caso de la geometría. Yo nunca puedo sentar las bases de las propiedades del espacion por meditación pura, en la misma medida en que no puedo apreciar las leyes básicas de la mecánica, la ley de la gravitación o cualquier otra ley física de esa manera. El espacio no es un producto de mis pensamientos, sino que me es dado a través de los sentidos. [Citado en Toepell 1986, 21]

En los cursos dictados en Königsberg Hilbert señaló la necesidad de establecer la independencia de los axiomas de la geometría. Al hacerlo, sin embargo, él remarcó el caracter objetivo y factual de esta ciencia. En 1894 el curso de Hilbert llevó el título "Fundamentos de la geometría". En el manuscrito de este curso se lee:

> El problema puede formularse como sigue: Cuáles son las condiciones suficientes, necesarias, y mutuamente independientes que deben postularse para una sistema de cosas, de manera tal que cualquiera de las propiedades de éstas últimas corresponda a un hecho de la geometría, y, conversamente, de manera que una descripción y un arreglo completos de todos los hecho geométricos sean posibles, basados en este sistema de cosas. [Citado en Toepell 1986, 58-59]

Desde un principio, Hilbert no limita este tipo de pregunats a la geometría. Lo que hace a la geometría especialmente accessible al tratamiento axiomático no es alguna característica particular de su esencia, sino más bien el mero hecho histórico de ser una ciencia tan desarrollada en lo que respecta a la cantidad y la seguridad de los resultados ya conocidos en ella. Pero en cualquier otro respecto, la geometría es esencialmente igual a toda otra ciencia natural. En su curso de 1894 Hilbert expresó esta idea así:

> Ente las apariencias o hechos de la experiencia que nos son manifiestos al observar la naturaleza, hay una clase que es peculiar: la de los hechos que conciernen a la forma externa de las cosas. La geometría se ocupa de estos hechos ... La geometría es una ciencia cuyas bases están en tal grado desarrolladas, que todos sus hechos pueden ser logicamente deducidos de otros hechos anteriores. Muy diferente es el caso de la teoría de la electricidad o de la óptica, en las cuales todavía muchos nuevos hechos están siendo descubiertos. Sin embargo, en lo que respecta a sus orígenes, la geometría es una ciencia natural. [Citado en Toepell 1986, 58]

Es el proceso mismo de la axiomatización el que transforma a la geometría, con su contenido empírico, en una ciencia matemática pura. No hay ninguna razón aparente por la cual un proceso similar no  podría ser aplicado igualmente a culaquier otra ciencia natural. Y de hecho, desde muy temprano Hilbert dejó claro que tal cosa debería ser realizada. En el manuscrito del curso de 1894 leemos que "todas las otras ciencias—antes que todo la mecánica, pero posteriormente también la óptica, la teoría de la elctricidad, etc.—deberían ser tratadas siguiendo el modelo preconizado por la geometría" [Toepell 1986, 94]. Algunos años después, en el invierno de 1898-99, mientras se encontraba escribiendo los *Grundlagen*, Hilbert dictó un curso de mecánica, por vez primera para él en Göttingen. En la introducción a este curso Hilbert reafirmó una vez más la estrecha afinidad entre la geometría y las otras ciencias naturales, así como del papel central de la axiomatización en la matematización de aquéllas. Comparando los varios dominios, Hilbert escribió el siguiente interesante pasaje que vale la pena citar en alguna extensión:

> De esta manera, la geometría, como la mecánica, proceden de la observación de la naturaleza, de la experiencia. En este respecto, la geometría es una ciencia experimental ... Pero su fundamentación experimental ha sido tan incontrovertidamente y tan generalmente reconocida, ella ha sido en tal grado confirmada, que no parece necesitar ninguna prueba adicional. Más aún, todo lo que queda por hacer es derivar estos fundamentos de un número minimo de axiomas independientes y de esta manera deducir todo el edificio de la geometía por métodos estrictamente lógicos... De esta manera [es decir, por medio del método axiomático] la geometría se convierte en una ciencia matemática pura. También en la mecánica se da el caso, que todos los físicos reconocen sus hechos más básicos. Pero el arreglo de los conceptos básicos es mucho más complicado, y la decisión cómo simplificarlo depende de futuros descubrimientos. Por tanto, la mecánica no puede aún ser cararcterizada como una disciplina matemática pura, en el grado en que la geomtería lo es. Debemos esforzarnos por transformarla en una tal. Debemos ampliar continuamente los límites de la matemática, no sólo para el bien de nuestro interés matemático, sino también en interés de la ciencia en general. [Citado en Corry 1996, 157]

Este pasaje, que representa la primera mención explícita del programa de Hilbert de axiomatizar la ciencia natural en general, expresa claramente la concepción nada formalista, por no decir claramente empiricista, que constituyó el trasfondo del pensamiento matemático de Hilbert al escribir los *Grundlagen.* En la primera página del manuscrtio del curso de geometría dictado al año siguiente en Göttingen Hilbert caracterizó la geometría de manera aún más suscinta y explícita que antes: "La geometría es la más perfecta de las ciencias naturales".[21]

Los *Grundlagen der Geometrie* aparecieron en Junio de 1899 como parte de una publicación festiva, señalando el descubrimiento del monumento a Gauss y Weber en Göttingen. El libro reunía las lecciones impartidas por Hilbert durante el semestre de invierno de 1898-99. Hilbert comenzó su exposición remarcando las similitudes entre la geometría y la aritmética: ambas disciplinas pueden ser reconstruidas empezando por un número reducido de axiomas.

Hilbert formuló sus axiomas de geometría para tres sistemas de objetos indefinidos: puntos, líneas y planos. Los axiomas establecen las interrelaciones que se requiere que éstos satisfagan. Hilbert los agrupo en cinco grupos: axiomas de incidencia, de orden, de congruencia, de paralelas y de continuidad. Los grupos no tienen significación lógica de por sí, sino que supuestamente expresan las diferentes formas en que nuestra intuición espacial se hace manifiesta . Hilbert mostró en los Grundlagen cómo es posible derivar todos los resultads conocidos de la geometría eulcídea, así como de algunas de las geometrías no-euclídeas, dependiendo de cuáles grupos de axioma uno admita. De esta manera, y reconstruyendo las ideas que dieron origen a su concepciones mismas, Hilbert demostró por ejemplo dos de los teoremas centrales de la geometría proyectiva, el teorema de Desargues (Cap. V) y el teorema de Pascal (Cap. VI), sin hacer uso del axioma de continuidad. Vale decir: estos dos teoremas son válidos en la geometría euclídea usual, así como en cualquier geometría no-arquimídea (como, por ejemplo, la propuesta por Veronese con anterioridad).

Hilbert demostró la mutua independencia de los axiomas que constituyen los varios grupos, así como de los grupos entre sí. Esto se logra por el método que desde entonces se volvió estandard: construyendo modelos de geometrías que satisafacen todos los axiomas deseados, excepto aquél del cual se investiga su independencia. Pero cabe señalar una vez más, que al probar la independencia, el interés de Hilbert se concentra en la geometría misma, y nunca en un estudio general de las posibles relaciones entre sistemas de axiomas y su posible modelos. Es por esta razón que desde el punto de vista puramente lógico, el sistema original de Hilbert no era el más económicamente posible. De hecho, poco timepo pasó hasta que algunos matemáticos señalaron que el sistema axiomático de Hilbert, visto como un sistema único que incluye todos los axiomas—y no como un sistema compuesto de cinco grupos—contiene un cierto grado de redundancia.[22] Para el propio Hilbert la verdadera finalidad de su trabajo era el establecer las interrelaciones entre los diferentes grupos, antes que entre los axiomas de diversos grupos tomados individualmente.

El segundo problema abordado por Hilbert y tal vez la principal motivación detrás de todo su trabajo, fue el problema de la consistencia de los varios tipos de geometría. A través de los Grundlagen Hilbert establecio la consitencia de la geometría relativa a la aritmética. Es decir, él probó que cualquier contradicción existente en la primera debería manifestarse igualmente en la artimética de los números reales. Esto se logra definiendo una jerarquía de cuerpos de números algébricos. Hilbert demostró la existencia de infinitos modelos incompletos reales que satisfacen todos los axiomas, excepto el así llamado "axioma de completidud" (*Vollständigkeitsaxiom*).[23] Luego, él probó la existencia de un sólo modelo que también satisface este último axioma. Este es el modelo de la geometría cartesiana usual, que se obtiene al tomar todo el cuerpo de los reales como base para el modelo

[Hilbert 1971, 29-32]. Una vez hecho ésto, es obvio que la pregunta de la consistencia de la aritmética de los reales se presenta en toda su agudeza. Hilbert no abordó este problema en los *Grundlagen*, pero a estas alturas él estaba totalmente seguro que una tal prueba podría encontrase de manera relativamenete sencilla. Hilbert asignó inmediatamente una alta prioridad a la resolución de este problema, y así, en su famosa lista de problemas de 1900, el segundo problema concierne la demostración de "la compatibilidad de los axiomas de la artimética" [Hilbert 1901, 299-300].

Estos son los dos principales requiremientos que Hilbert demanda de una systema de axiomas adecuado del cual se pueden deducir todos los resultados conocidos de la geometría: independencia y consistencia. En principio, no debería haber razón alguna por qué un análisis similar no podría aplicarse a un sistema arbitrario de postulados que establece una relación abstracta entre una colección de objetos indeterminados. Por ejemplo, si se piensa que a la sazón ya se había aceptado una definición abstracta del concepto de grupos por medio de axiomas, por qué no aplicar al sistema de esos axiomas, un análisis modelado en el ejemplo de Hilbert para la geometría? La actitud de Hilbert hacia este tipo de análisis nos ayuda a comprender su propia concepción axiomática. Esta última no propendía ni estimulaba la formualción de sistemas abstractos de postulados inmotivados por teorias matemáticas concretas y desarrolladas. Debe notarse que en los años inmediatamente siguientes a la publicación de los *Grundlagen*, se desarrolló un programa, especialmente en los EEUU, que se puso como meta el análisis de los sistemas abstractos de postulados que definen conceptos algébricos tales como grupos, cuerpos, algebras booleanas, etc., usando los métodos propuestos por Hilbert en los *Grundlagen*.[24] No tenemos ninguna evidencia que Hilbert mostró algún interés en este tipo de trabajos, pero sí que hay razones para pensar que ellos indicaban una dirección de investigación que Hilbert mismo no hubeira contemplado al plantear su programa de axiomatizacióm. Más aún, parecería seguro afirmar que Hilbert habría considerado esos esfuerzos como matemáticamente superfluos y mal concebidos.

En 1899 Hilbert dictó una conferencia ante la asamblea anual de la federación de matemáticos alemanes (*DMV*) en Munich. En esta charla, que fue publicada en 1900 bajo el título "Sobre el concepto de número" (*Über den Zahlbegriff*) [Hilbert 1900], Hilbert planteó de forma explícita, por vez primera, la necesidad de abordar el problema de la consistencia de la aritmética, y a la vez propuso un sistema de axiomas que en su opinion podría ser adecuadamente utilizado en este dominio. Fuera de su libro sobre los fundamentos de la geometría, ésta constituyó su segunda publicación concerniente al método axiomático. Es por tanto interesante hacer notar el hecho que Hilbert no presentó este método como el único aceptable en matemática. Antes bien, el discutió dos posibles maneras en que conceptos matemáticos pueden ser tratados: la axiomática y la genética. El ejemplo clásico de la aplicación del método genético aparece en relación con los números reales. En este ejemplo, uno empieza definiendo los números naturales, que emergen de la intuición básica de contar. Dados los naturales, con el fin de crear la posibilidad de substraer dos números naturales cualesquiera, este sistema debe ser extendido parta incluir también a los enteros. La necesidad de definir completamente la división de los enteros nos lleva a introducir los irracionales, y finalmente uno define los reales como el sistema de cortes de los irracionales. Del otro lado, señaló Hilbert, tenemos el método axiomático, tipicamente usado en la geometría. Hilbert explicó que ambos enfoques se complementan mutuamente en matemáticas. Resumiendo su propia opinión en lo que respecta al valor relativo de ambos métodos se Hilbert expresó como sigue:

> A pesar del alto valor pedagógico del método genético, el método axiomático tiene la ventaja de proveer una exposición concluyente y de comunicar una plena seguridad lógica concerniente al contenido de nuestro conocimiento. (Hilbert 1900, 184)

Con este artículo, Hilbert echó las bases para la aplicación a la aritmética del tipo de métodos que anteriormente él mismo había aplicado a la geometría. A la vez, él estaba sugiriendo, pro primera vez, que algunos de las dificultades inducidas por la introducción de cardinales transfinitos podrían ser resueltas aplicando un análisis axiomático similar a la noción de conjunto. Por el contrario, él no mencionó de manera alguna la conexión entre este tipo de investigaciones y preocupaciones metodológicas o lógicas relacionadas con las matemáticas. Como ya se dijo, en esta etapa Hilbert no pensó que, en lo referente a la aplicación del método axiomático, pudiera encontrase con dificultades provenientes de la lógica.

Una fuente adicional que conviene estudiar con el fin de entender el pensamiento axiomático temprano de Hilbert es su frecuentemente citada correspondencia con Gottlob Frege (1846-1925).[25] Esta correspondencia ha atraído la atención de historiadores y filósofos de la matemática, especialmente por el debate entre los dos matemáticos concerniente a la naturaleza de la verdad en matemáticas. Hilbert expresó aquí la opinión que la investigación axiomática de las teorías matemáticas no sólo conferían a éstas un alto grado de ceritud, sino que, más aún, ella es la que otorgaba a los conceptos matemáticos su justificación e inclusive su existencia misma. Este punto de vista, que equipara verdad matemática con consistencia lógica, servía entre otras cosas para justificar a-posteriori el tipo de pruebas de existencia por contradicción del tipo de la aplicada por Hilbert mismo en 1893 para su teorema de finitud de la base de un sistema de invarainates algébricos. Pero este aspecto tan comunmente destacado, no es sino uno de los lados de una concepción mucho más compleja que Hilbert presentó a Frege en sus cartas. En primer lugar, Hilbert señaló que sus motivaciones diferían totalmente de las que llevaron a su colega a investigar los fundamentos de la lógica. La investigación axiomática, estableció Hilbert, no era para él un fin inherentemente justificable, sino más bien una herramienta utilizable para alcanzar un más claro entendimiento de las teorías matemáticas. Los problemas que había encontrado en su diario trabajo de investigación forzaron a Hilbert a aplicar el análisis axiomático de esas teorías. En una carta del 29 de diciembre de 1899, Hilbert escribió a Frege:

> Si queremos entendernos mutuamente, no debemos olvidar que las intenciones que nos guían a ambos son diferentes de base. Fue por necesidad que yo tuve que establecer mi sistema de axiomas: quería que fuera posible entender las proposiciones que considero como los resultados más importantes de la investigación geométrica: que el axioma de las paralelas no es una consecuencia de los otros axiomas, y similarmente para el axioma de Arquímides, etc. ... Quería que fuera posible entender y contestar preguntas tales como: por qué la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos y cúal es la relación entre este hecho y el axioma de las paralelas. [Gabriel et al. (eds.) 1980, 38]

En esa misma carta, Hilbert explicó su bien conocida posición concerniente a la relación entre axiomas y verdad. Expresando desacuerdos con la opinión comunicadad por Frege en carta anterior, Hilbert declaró que "si los axiomas arbitrariamente formulados y todas sus consecuencias no se contradicen mutuamente, entonces ellos son verdaderos, y todo lo definido por ellos existe. Este es para mí el criterio de existencia y de verdad" [Gabriel et al. (eds.) 1980, 39]. Esta aseveración es absolutamente clara y concisa en lo que respecta a la posición de Hilbert con respecto a la naturaleza de la verdad en matemáticas. Sin embargo, ella no puede tomarse, como se ha tomado muchas veces, como evidencia de que los axiomas propuestos por Hilbert en sus *Grundlagen* fueran ellos mismos, de forma alguna, arbitrarios!

En su repuesta a esta carta, Frege resumió el contenido de la posición de Hilbert de la siguiente manera: "Me parece que usted quiere separar la geometría de la intuición del espacio y convertirla en un ciencia puramente lógica, como la aritmética" [Gabriel et al. (eds.) 1980, 43]. Como la carta de Hilbert que siguió a ésta contiene tan sólo un par de líneas (Hilbert explicó que estaba sobrecargado de trabajo) no conocemos su reacción directa a la forma en que Frege condensó su posición. Podría decirse que la caracterización de Frege corresponde en cierta forma a algunas de las declaraciones del propio Hilbert, en el sentido de que una completa axiomatización de la geometría evitaría la necesidad de apoyarse en la intuición al demostrar los teoremas. Pero al mismo tiempo debe subrayarse que para Hilbert, como para Pasch antes de él, los axiomas mismos no están separados de la intuición espacial, sino que por el contrario están concebidos como una expresión total y coherente de aquélla. Así vistos, y contrario a la formulación de Frege en su carta, la meta de Hilbert era el desconectar la *deducción* (y tan sólo la deducción) de los teoremas de la intuición espacial, pero al mismo tiempo, basado en una escogencia adecuada de los axiomas que reflejan dicha intuición, reforzar la efectividad de la geometría como ciencia—como ciencia *empírica*, sería más apropiado decir—del espacio.

En su carta, Frege también agregó un comentario tocante a las pruebas de independencia. El pensaba que las técnicas introducidas por Hilbert eran en efecto útiles y adecuadas, pero él agregó que aquéllas serían mucho menos interesantes al aplicarlas a sistemas arbitrarios de postulados. En su carta leemos:

> El punto principal parece ser su deseo de colocar la geometría euclídea en una perspectiva más amplia. En efecto, la mutua independencia de los axiomas sólo puede ser demostrada de esta forma. Este tipo de tarea me parece de gran interés científico, mientras se refiera a axiomas en el sentido de la geometría euclídea tradicional. Si uno la extiende a sistemas de proposiciones arbitrariamente establecidas, ella será en general de mucho menor importancia científica. [Gabriel et al. (eds.) 1980, 40]

Tampoco en este caso no tenemos evidencia directa de la reacción de Hilbert al comentario de Frege, pero de todo lo que sabemos, no vemos ninguna razón para pensar que él hubiera podido estar en desacuerdo. Como ya se dijo, Hilbert nunca expresó interés directo en la investigación postulacional de sistemas abstractos, ni pensó que tal tarea tuviese algún valor matemático intrínseco. De hecho, la insistencia en discutir aquí los sistemas *arbitrarios* de axiomas parecería venir de Frege más que de Hilbert. Uno se pregunta, por tanto, hasta qué punto ha contribuído este tan conocido intercambio epistolar a difundir una imágen del pensamiento de Hilbert tan diferente a la que sus propios textos muestran.

Una oportunidad inigualable de expresar su concepción de la centralidad del método axiomático como vehículo de definición de los conceptos matemáticos se le presentó a Hilbert con ocasión del congreso internacional de matemáticos de 1900, organizado en Paris. En esta ocasión Hilbert fue invitado a presentar una de las charlas centrales, y él escogió concentrarse en la importancia de los problemas concretos para la constitución de una ciencia matemática viva y efervescente. Esta escogencia tiene ya de por sí el poder de indicarnos dónde yacían los verdaderos intereses investigativos de Hilbert. La relación entre consistencia lógica y verdad matemática ocupa el centro de atención del segundo problema de esta lista. Hilbert lo formuló así:

> Al investigar los fundamentos de una ciencia, debemos postular un sistema de axiomas que contenga una descripción completa y exacta de las relaciones básicas entre las ideas elementales de esa ciencia. Los axiomas así postulados son a la vez las definiciones de dichas ideas elementales, y ninguna porposición de la ciencia cuyos fundamentos estamos examinando será considerada verdadera a menos que sea derivable de los axiomas en un número finito de pasos lógicos. [Hilbert 1902, 447]

Como es sabido, es ésta una de las ideas que en los añós treinta recibió un fuerte golpe, siguiendo los trabajos de Kurt Gödel. En la misma lista, Hilbert incluyó como problema número seis la axiomatización de la física. Detenernos a estudiar el lugar que este problema ocupa dentro de la concepción científica de Hilbert nos llevaría mucho más allá de lo que el espacio aquí disponible nos permitiría. Remarcaremos tan sólo que si Hilbert hubiese visto el método axiomático como una posibilidad de entender la matemática toda como un juego formal, vacío de contenido concreto, sería muy difícil entender qué es lo que él buscaba con la axiomatización de la física, y por qué consideró este problema tan importante como para incluírlo entre los veintitrés de su lista.

Resumiendo esta sección diremos que la concepción axiomática de Hilbert no representó en forma alguna una ruptura con los entes clásicos de la matemática y de la ciencia empírica. Por el contrario, ella buscaba un mejoramiento de esta última y una mejor comprensión de su esencia. La perspectiva hilbertiana no pretendía estimular el entendimiento de las matemáticas como un juego formal, vacío de contenido intuitivo. El siglo veinte ha conocido una amplia profusión de teorías matemáticas construídas en base a un sistema de postulados abstractos, que frecuentemente carecen de motivación matemática concreta directamente identificable. Esta profusión ha sida vista muchas veces como evidencia del triunfo del punto de vista hilbertianano, y de hecho, se ha considerado una de las mayores contribuciones de Hilbert al establecimiento del pensamiento matemáico contemporáneo.[26] Más áun, el gran impacto del pensamiento axiomático de Hilbert, junto con la así llamada posición "formalista" que ha sido asociada al nombre de Hilbert en relación con la "crisis fundacional" de los años veinte, han sido interpretados como si Hilbert mismo hubiera estimulado esa visón de las matemáticas como un juego formal, carecente de contenido concreto.[27] Pero debe ser claro que Hilbert mismo nunca estuvo guiado en su propio trabajo por tal concepción, y que, más áun, frecuentemente se tomó la molestia de contradecirla explicitamente. Así, por ejemplo, en una charla pública dictada en 1919, consciente de algunas concepciones erróneas de las matemáticas que circulaban por aquel entonces, Hilbert explicó a una audiencia general su propia visión del papel jugado por las definiciones axiomáticas. En esa oportunidad dió a entender claramente su punto de vista, como sigue:

> La matemática no tiene nada que ver con arbitrariedad. La matemática no es de forma alguna un tipo de juego cuyos objetivos se determinan por medio de reglas arbitrariamente establecidas. Por el contrario, se trata de un sistema conceptual guiado por una necesidad interna que solamente puede ser así, y nunca de otro modo. [Hilbert 1992, 14]

En esta temprana etapa de la carrera de Hilbert, entonces, la tarea de la axiomatización es vista como una tarea de interés y de motivación puramente matemáticos. Esto se aplica en particular a la prueba de la consistencia de la aritmética y a la relación entre los axiomas de la teoría de los conjuntos y la solución del problema del continuo de Cantor. En todos sus escritos de esta época, Hilbert usó el termino “lógica” de manera indiscriminada, refiriéndose a la comunmente aceptada concepción Kantiana de la lógica como básicamente libre de problemas y válida a-priori como verdadera. El no expresó ningún interés particular en los problemas metodológicos y lógicos despertados por el método axiomático. Hasta 1903 el interés axiomático de Hilbert se concentró en los fundamentos de la geometría. En 1903, sin embargo, ocurrió un siginificativo cambio de dirección, siguiendo la publicación de las paradojas que Russell descubrió en el sistema lógico de Frege. En realidad, parece ser que argumentos contradictorios del tipo de los propuestos por Russell eran conocidos en Göttingen hacía ya un par de años, a través del trabajo de Ernst Zermelo (1871-1953) [Peckhaus 1990, 48-49]. Pero no fue hasta la publicación de Russell que Hilbert se convenció de la necesidad de dedicar mayores esfuerzos al análisis axiomático de la lógica y de la teoría de los conjuntos, como parte de su tarea más amplia de establecer la consistencia de la aritmética. Desde 1903 en adelante, se desarrolló en Göttingen una intensa actividad investigativa en esta dirección. Como Hilbert acostumbraba en muchos casos, esta vez escogió a Zermelo como la persona sobre quien recaería la misión de desarrollar el programa en detalle, y así en realidad sucedió. De esta manera se inció el estudio sistemático de la lógica y de la teoría de conjuntos en el círculo matemático de Hilbert en Göttingen. Pero aún dentro de este nuevo rumbo que los intereses de Hilbert tomaron, puede verse claramente cómo su concepción clásica del álgebra y de su papel dentro de la matemática en general no fue afectada en forma alguna. Dedicaremos la próxima sección a discutir este punto.

**Suma de Vectores y Algebra: Hilbert en 1905**

La nueva importancia concedida al estudio axiomático de la lógica en Göttingen se reflejó, como de costumbre, en los cursos que el mismó Hilbert dictó. Así, su curso del semestre de verano de 1905 versó sobre "Los Principios Lógicos del Pensamiento Matemático".[29] En este curso Hilbert desarrolló los principios de un cálculo logico que luego Zermelo elaboraría en mayor detalle [Peckhaus 1994]. Una discusión detallada del contenido de este interesante curso estaría mucho más allá del alcance del presente artículo. Pero el manuscrito del curso nos ofrece también una perspectiva interesante sobre la concepción hilbertiana del álgebra como disciplina matemática, y es ella la que queremos discutir aquí.

La primera parte del curso presenta una visión panorámica de la aplicación del enfoque axiomático a la aritmética, a la geometría y a las ciencias naturales. Con ésto, Hilbert pretendía preparar el camino para discutir la axiomatización de la lógica, lo cual era para él un asunto mucho más importante en aquel momento. Hilbert explicó nuevamente cuáles eran las pricipales herramientas y las principales tareas a las cuales estaba destinado su método axiomático, repitiendo lo que ya había dicho en obras anteriores: al analizar un sistema axiomático queremos estudiar su consistencia y la independencia lógica de los axiómas.

Los axiomas de aritmética que Hilbert presentó aquí repretían los de su artículo "*Über den Zahlbegriff*". Para la geometría, Hilbert presentó el mismo sistema de los *Grundlagen*. La sección sobre la axiomatización de las ciencias naturales se basa en trabajos de otros autores. Pero ésta es la primera vez que uno encuentra un recuento detallado de lo que Hilbert entendía por "axiomatización de la fisica.", que él había propuesto como sexto problema de su lista en 1900.

La axiomatización de la fisica, dijo Hilbert en su curso de 1905, es una tarea de la que aún se está muy lejos. Pero una parte específica de ella sí se ha terminado casi completamente, aunque en fecha bastante reciente. Se trata de la "ley del paralelogramo", o lo que es equivalente, las leyes de la suma de vectores. En sus lecciones Hilbert basó su presentación axiomática de este dominio en obras anteriores de Gaston Darboux (1842-1917), de Georg Hamel (1877-1954), y de uno de sus propios doctorantes, Rudolf Schimmack.[30]

Hilbert comenzó definiendo una fuerza como un vector de tres componentes. Aunque Hilbert no añadió ninguna demanda adicional sobre la naturaleza de los vectores, es claro que él se refiería aquí al conjunto de todos los triples odenados de números reales. En otras palabras, este sistema de vectores no es una colección abstracta cuyas propiedades son definidas axiomáticamente por medio de postulados abstractos, sino más bien un sistema concreto de objetos matemáticos, que se había venido empleando en física con gran efectividad en las últimas decadas.[31] De hecho, en el artículo de Schimmack de 1903—basado en su tesis de doctorado—un vector es explicitamente definido como un segmento dirigido en el espacio euclídeo. Más áun, dos vecotres quedan definidos como iguales, si sus direcciones y sus longitudes coinciden [Schimmack 1903, 318]. Como en otros casos similares, en relación con Hilbert uno puede suponer que este punto de vista del alumno representa fielmente también el del maestro.

El sistema de axiomas que Hilbert presentó en el curso sirven para definir la adición de cualesquiera dos de estos vecotres. En general se acostumbra definir esta adición como un tercer vector cuyos componentes son iguales a la adición de los componentes de los vectores dados. A primera vista, esta misma definición podría ser tomada como el único axioma de la teoría. Pero la verdadera finalidad del análisis axiomático es precisamente separar una idea como ésta en un systema de nociones más simples y mutuamente independientes, que expresen las intuciones básicas que la conforman [Hilbert 1905, 123]. Hilbert postuló entonces seis axiomas que definen la adición de vectores. El primero establece la existencia y buena definición de una tal suma (sin establecer su valor). El segundo y el tercero postulan la conmutatividad y asociatividad. El cuarto axioma establece la relación entre la suma y la dirección. Este axioma se formula como sigue:

4. Sea $aA$ el vector $(aA_x, aA_y, aA_z)$, cuya dirección es la misma de $A$. Entonces, todo número real $a$ defines la suma:

$$A + aA = (1 + a)A.$$

En otras palabras, la suma de dos vectores de igual dirección se define como el vector cuya magnitud es la suma algebraica de las magnitudes de los factores, y su dirección es la misma.

El quinto axioma establece la relación entre suma y rotación:

5. Sea $D$ una rotación del espacio alrededor del punto de origen común de dos vectores $A$ y $B$.

Entonces, la rotación de la suma de los vectores es igual a la adición de la rotación de los factores. $(A + B) = DA + DB$

En otras palabras, la posición relativa de la suma y los factores es invariante con respecto a la rotación.

El sexto axioma expresa una condición de continuidad:

6. La suma es una operación continua, es decir, dado un dominio $G$ suficientemente pequeño alrededor del punto final de $A + B$ uno puede siempre encontrar dominios $G_1$ y $G_2$, alrededor de $A$ y de $B$ respectivamenete, tales que el punto final de las sumas de cualesquiera dos vectores con puntos iniciales en estos dos dominios recae siempre dentro de $G$.

Todos estos, dice Hilbert son axiomas simples. Además, si pensamos en los vectores como representando fuerzas, los axiomas son bastantes plausibles. De esta manera, ellos dan cuenta de las intuicones básicas de los hechos de la experiencia. Por ejemplo: la acción de dos fuerzas actuando en un mismo punto, puede ser siempre sustituída por una sola fuerza actuando en dicho punto. Igualmente, el orden en que las fuerzas son añadidas no cambia el resultado, dos fuerzas que actúan en la misma dirección pueden ser substituídas por otra fuerza de la misma dirección, y la posición relativa de los componentes es independiente de rotaciones de las coordinadas. Finalmente, la demanda de continuidad para este sistema es similar a la de la geometría, y por lo tanto se formula de manera similar.[32]

La necesidad de incluír estos seis axiomas fue establecida por primera vez por Darboux, y posteriormente demostrada por Hamel. La principal dificultad que éste último encontró en su trabajo se despertó con el sexto axioma. En su articulo de 1903 Schimmack demostró la independencia de los seis axiomas, aunque formulándolos de manera un tanto diferente a como Hilbert lo hizo en 1905. Schimmack usó para este fin la técnica de los modelos diseñada por Hilbert para discutir los axiomas de la geometría.

El punto importante de este sistema para el argumento que queremos discutir en el presente artículo, es que Hilbert desarrolla toda su exposición de los vectores dentro del marco de la axiomatización de la mecánica, y sin conexión alguna con el álgebra! Por ejemplo, la definición de grupos por medio de sistemas de postulados abstractos, que había sido formulada ya en 1893 por Weber, y que había sido estudiada con técnicas similares a las hilbertianas hacía algunos años en los EEUU, no es siquiera mencionada por Hilbert, a pesar de que obviamente la suma de vectores satisface antes que todo los postulados de grupo. Hilbert tampoco discute en este contexto las propiedades de cuerpo de los reales, y mucho menos aún de la idea de un cuerpo asbtracto. Esto nos permite entender con claridad las imágenes del álgebra de Hilbert. El concepto de vector se había venido desarrollando como una herramineta útil para trabajar varios dominios de la física. Estos vectores son entidades matemáticas con contenido "concreto", como por ejemplo los números reales y la geometría euclídea, cuyas propiedades esenciales, ya conocidas por la experiencia matemática acumulada al trabajar con ellos, se busca entender mejor con ayuda del método axiomático. De ninguna manera son ellos una manifestación de la idea general de estructura matemática, como serían considerados posteriormente al lado de los grupos, los cuerpos, los anillos, etc. El análisis axiomático efectuado aquí por Hilbert busca describir de manera explícita las intuiciones básicas detrás de la idea de vector. Las similaridades aparentes entre estos axiomas y los de grupo o cuerpo, no son directamente relevantes al tipo de motivación que mueve a Hilbert en su análisis, y que no tiene ninguna relación a la idea de estructura algebraica.

Para recalcar más aún este punto, así como para apreciar correctamente las motivaciones de los otros matemáticos que Hilbert cita en su curso, debe mencionarse el hecho que los artículos de Hamel y de Schur no fueron publicados en las revistas alemanas de orientación más claramente purista (tales como los *Mathematische Annalen* o el *Mathematische Zetischrift*) sino más bien en el *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, un conocido órgano de matemática aplicada (tal y como su subtítulo oficial lo declaraba: "*Organ für angewandte Mathematik*"). Esta revista fue creada por Oscar Xavier Schlömlich (1823-1901), y en la época aquí discutida, era editada por Carl Runge (1856-1927), el matemático aplicado más importante de la escuela de Göttingen.

Concluiremos la presente sección con una cita tomada del manuscrito del curso, que expresa succintamente el corazón de toda la concepción científica de Hilbert, y en particular del lugar del análisis axiomático en la ciencia. Hilbert veía la ciencia natural, y la geometría dentro de ella, como un ente orgánico que crece y se desarrolla simultaneamente en todas las direcciones, aumentando su alcance por una parte y refinando continuamente le estructura lógica de las partes existentes. La clarificación de los fundamentos con ayuda del método axiomático era para Hilbert tan sólo una de las facetas de eses crecimiento y, a pesar de su importancia, no precisamente una parte que tuviera prioridad conceptual sobre las otras. En sus lecciones de 1905 Hilbert utilizó una metáfora muy a su gusto para describir esta concepción: la metáfora del edificio en construcción. Hilbert dijo así:

> El edificio de la ciencia no es como una vivienda, en la cual las bases tienen que ser firmemente edificadas antes de poder proceder a construir y agrandar las habitaciones. La ciencia prefiere echar mano lo antes posible de amplios espacios donde poder pasearse a gusto. Es sólo después de ésto, cuando aquí y allá aparecen los primeros signos de que las bases endebles no son capaces de soportar la expansión de las habitaciones, que ella emprende la tarea de darles soporte y fortificarlas. No es ésto una debilidad de la ciencia, sino todo lo contrario. Este es el correcto y sano camino de su desarrollo. [Citado en Peckhaus 1990, 51]

**Algebra y los Discípulos de Hilbert**

Una última perspectiva que nos permite analizar las imágenes del álgebra de Hilbert es la que proporcionan los trabajos de sus discípulos. De las sesenta y ocho disertaciones doctorales que Hilbert supervisó en Göttingen, sólo cuatro tratan problemas directa o indirectamenete relacionados con su primer campo de interés investigativo: la teoría de invariantes. Ninguna de las disertaciones aborda problemas relativos a la factorización de polynomios, a pesar de que durante esos años otros matemáticos contribuyeron con importantes resultados en ese campo, elaborando ideas originalmente concebidas por el mismo Hilbert. Tal es el caso de Emanuel Lasker y Francis S. Macaulay, con sus importantes teoremas concerninentes a los ideales de polinomios [Corry 1996, § 4.7]. Asimismo, ninguno de los discípulos de Hilbert escribió una tesis sobre temas de los que luego llegaron a estar relacionados con el álgebra moderna, tales como la teoría de cuerpos abstractos, y mucho menos la teoría abstracta de los grupos.[33] En realidad, es un tanto sorprendente que entre los veintitrés problemas de 1900, aunque cinco de ellos abordan temas que puede considerarse como pretenecientes al álgebra (en la concepción de esta disciplina en el siglo XIX), ninguno de éstos discute problemas cercanos a los intereses algebricos que podrían califcarse de más "modernos", como por ejemplo los tocantes a la teoría de grupos finitos.

En 1922, la revista *Die Naturwissenschaften* dedicó uno de sus números a Hilbert, con motivo de sus sesenta años. Algunos de sus pasados discípulos fueron invitados a contribuír con un recuento de sus contribuciones en diversas disciplinas. Otto Toeplitz (1881-1940) fue el encargado de descirbir su contribución al álgebra [Toeplitz 1922]. Toeplitz explicó en detalle el contenido de las investigaciones en la teoría de los invariantes algebraicos, enfatizando el significado de éstas en comparación con los logros anteriores de Gordan y Max Noether. La segunda contribución al álgebra que Toeplitz mencionó concernía los aspectos algebraicos de la teoría hilbertiana de los determinantes infinitos, una teoría que Hilbert había desarrollado como parte de su trabajo en ecuaciones integrales. Toeplitz inclusive consideró las contribuciones de Hilbert al debate sobre los fundamentos—especialmente su opsición a las posiciones de Luitzen E. Brouwer y Hermann Weyl. Toeplitz elogió el valor de la posición de Hilbert y de su aplicación sistemática del método axiomático a este dominio, conectando ésta última a su disposición a adoptar pruebas no constructivas en álgebra. Por el contrario, Toeplitz no mencionó de manera alguna la conexión de estos asuntos con algún enfoque novedoso que Hilbert o sus seguidores hayan introducido al álgebra, y en particular, no conectó ninguno de los logros o contribuciones de Hilbert al álgebra con la idea de estructura algebraica. Esto, a pesar de que para aquel entonces, especialmente en Göttingen, ya se habían empezado a producir los importantes trabajos de Emmy Noether sobre la estructura de los anillos, que sin duda pueden considerarase entre las primeras contribuciones verdaderamente importantes del enfoque estructural. Cabe pensar que los enfásis ofrecidos aquí por Toeplitz corresponden muy cercanamente a los del mismo Hilbert.

Cuál fué la reacción de Hilbert frente al desarrollo del álgebra en la dirección estructuralista en los años treinta? Más particularmente: cuál fue la reacción de Hilbert ante la presentación estructural de esta disciplina, tal y como aparecía en el texto de van der Waerden? Los recuentos tradicionales de la contribución de Hilbert han tendido a presentarlo como el matemático modernista por antonomasia. Desde esta perspectiva, es natural ver todo desarrollo importante en matemática pura durante la primera mitad del siglo como parte de la propia contribución hilbertiana, o por lo menos, como un producto directo de ella. Esto es válido mucho más aún al referirse a un producto clásico de la matemática de Göttingen, como lo fue el libro de van der Waerden, y sobre todo por el hecho de que que la obra de Hilbert contenía ya muchos de las caracaterísticas fundamentales de lo que iría a constituír eventualemente el enfoque estructural del álgebra. Pero en vista del análisis ofrecido en este artículo, cabe al menos dudar que Hilbert haya aprobado entusiásticamente este desarrollo, o que lo haya visto como la dirección que él mismo hubiera querido imprimir sobre la investigación algebraica moderna. Uno se pregunta qué es lo que pensó Hilbert sobre una presentación del álgebra que invertía el orden conceptual que él había desarrollado con tanta efectividad en su propia obra, y que reducía el sistema de los números reales—corazón mismo de su enfoque del problema de los invariantes, de la teoría algebraica de los números e incluso de la geometría—a tan sólo un caso particular de una idea mucho más general: la idea de estructura algebraica. Habría visto Hilbert como una actitud matemática legítima el derivar nuestro conocimiento de los números reales de las propiedades generales de esta nueva álgebra, y no al contrario, como era tradición? En realidad no tenemos ninguna evidencia directa de cual haya sido su actidud a este respecto. Sin embargo podemos al menos conjeturar que la actidud de Hilbert en este sentido era a lo sumo ambigua, y como evidencia podemos referirnos al bien conocido obituario de Hilbert que escribió su discípulo Hermann Weyl, y en donde leemos la siguiente evaluación:

> Hilbert es el campeón de la axiomática. La actitud axiomática era en su opinión una de siginificación universal, no sólo para la matemática, sino para la ciencia en general. Sus investigaciones en el campo de la física fueron concebidas en un espíritu axiomático. En sus cursos le gustaba ilustrar el método con ejemplos tomados de la biología, la economía, etc. La interpretación epistemológica de la ciencia ha sido profundamente influenciada por él. *Muchas veces, al elogiar el método axiomático el parecía implicar que éste estaba destinado a hacer olvidar (obliterar) completamente el método constructivo o genético. Yo estoy convencido que, por lo menos en la última parte de su vida, ésta no era su opinión verdadera.* Porque, si bien es cierto que él manejo lo objetos matemáticos primarios por medio de los axiomas de su sistema simbólico, las fórmulas siempre las construyó de la manera más explícita y finita. En tiempos recientes, el método axiomático se ha expandido desde las raíces a todas las ramas del árbol matemático. El álgebra, para tomar un ejemplo, ha sido permeada de pies a cabeza por el método axiomático. Uno puede describir en este caso el rol de los axiomas como subsidiario: fijar el rango de las variables que se usan en las construcciones específicas. Pero no sería muy difícil retocar la imágen toda y hacer que los axiomas aparezcan como los amos. Una actitud

> imparcial tendría que hacer justicia a ambas facetas. El atractivo de la investigación matemática moderna es debido en no poca medida a la exitosa combinación de procedimientos axiomáticos y genéticos.[Weyl 1944, 645. El subrayado es agregado]

Una justa apreciación de este remarcable juicio de Weyl requiere un mejor entendimiento de la manera en que Hilbert concebía la aplicación del método axiomático a las ciencias naturales. Un estudio de este tema, por curioso que parezca queda aún por llevarse a cabo. Peroro en todo caso, lo dicho anteriormente de la obra de Hilbert parecería indicar que Hilbert hubiera aprobado sin reticencias este juicio de Weyl.

**Hilbert y la Imagen Estructural del Algebra**

Podemos ahora formular resumidamente la contribución de David Hilbert al desarrollo del enfoque estructural de la siguiente manera: aunque los trabajos de Hilbert contienen la mayor parte de los elementos necesarios para elaborar la imagen estructural del álgebra, Hilbert mismo no recurrió al uso de esa imagen en su propia obra, ni tampoco sugirió que ella, o alguna otra parecida, deberían ser adoptadas en álgebra.

En sus investigaciones en la teoría de los invariantes algebraicos, Hilbert ofreció una alternativa viable al enfoque algorítmico que dominaba esa disciplina hasta aquel entonces. Además, él mostró lo fructífero que podría ser el introducir a ese campo técnicas tomadas de la teoría de números. Esta transposición de métodos recalcó la similaridad estructural de los roles jugados por las propiedades de los cuerpos de números y de los cuepros de funciones, en esas dos teorías aparentemente separadas.

El trabajo de Hilbert en la teoría de los números, por su parte, trajo al conocimiento de una mayor parte de la comunidad matemática los métodos introducidos por Kronecker y por Dedekind, y especialmente el enfoque desarrollado por el segundo de ellos. Hilbert refinó los conceptos y las técnicas existentes, y también introdujo nuevos, que le ayudaron a sistematizar el estudio de las extensiones de cuerpos.

Finalmente, el estudio de los fundamentos axiomáticos de la geometría, con la concomintante concepción axiomática de las matemáticas, estimuló estudios similares tocantes a otros entes matemáticos y abrió el camino al estudio metamatemático de dichos sistemas. Esta era una condición necesaria para que pudiera darse la definición de los anillos abstractos, tales como la avanzada por Abraham Fraenkel. Esta última fue la que proporcionó el marco conceptual donde Emmy Noether desarrolló su propia teoría de anillos abstractos, abriendo así el camino a la consolodación definitiva del enfoque estructural en álgebra.

Pero aunque todas estos elementos que aparecen en la obra de Hilbert podrían haber sido combinados por él mismo de manera de dar a su propia obra el giro estrcutral que caracterizaría posteriormente la corriente central de la investigación algebraica, las motivaciones de Hilbert estaban tan directa y profundamente enraizadas en las imágnes de la matemática del siglo diecinueve, que todos sus logros antes mencionados fueron concebidos con el propósito de servir—con enorme éxito—a la resolución de problemas del tipo que se concocían en aquella misma tradición de la cual Hilbert era parte integral. Así, Hilbert no fue un innovador en álgebra en el sentido en que Noether, Artin, o van der Waerden lo fueron. Estos últimos, aunque basándose también en la tradición existente, cambiaron de fondo la agenda misma que orientaba la investigación en esa disicplina. Hilbert, al contrario, se dedicó a realizar a fondo las agendas investigativas existentes en todas las disciplinas algebraicas a las cuales dedicó sus esfuerzos.

El tratamiento de los cuerpos en la obra de Hilbert suguió muy de cerca el que Dedekind había propuesto, y que mantenía un status conceptual difernete para conceptos como cuerpos y grupos. Los cuerpos de Hilbert, como ya se dijo, fueron siempre subcuerpos concretos del cuerpo de los complejos, mientras que sus grupos eran entidades no-numéricas que lo ayudaron a investigar las propiedades de los anteriores. Igualmente, sus polinomios fueron siempre expresiones racionales definidas sobre el mismo cuerpo de los complejos. En estos dos casos, son las propiedades conocidas (y aceptadas como no problemáticas) del cuerpo de los complejos las que dictan las propiedades de los entes que se irán a investigar. Finalmente, la forma en que Hilbert concibió el uso del método axiomático implicaba, por definición, un reconocimiento de la prioiridad conceptual de las entidades concretas de la matemática clásica. El método es aplicado con el fin de enetnder mejor las propiedades de éstas últimas, antes que con intención de definir a través de los axiomas nuevos sistemas abstractos vacíos de significado matemático directamente intuíble. Así, la idea de estructura algebraica como principio organizador de esta disciplina es totalmente ajena a la visión matemática de Hilbert. En su obra, todos los conceptos y resultados del álgebra derivan su significado y sus propiedades de las de los sistemas de números reales y complejos, y nunca al revés.

El enorme impacto producido por los *Grundlagen* de Hilbert, tanto en la investigación geométrica, como en matemática en general, contribuyeron a solidificar más aún su ya bien ganada fama de matemático. Pero él veía ante sí nuevos desafíos y nuevos campos por recorrer. Ya en 1901 Hilbert empezó a cultivar su nuevo campo de interés: las ecuaciones integrales. Este dominio atraería sus capacidades investigativas hasta los alrededores de 1912, fecha en que empezaría a publicar trabajos tocantes a los fundamentos de la física. Hacia 1920, su interés en los fundamentos de la matemática volverían a ocupar sus energías, empezando su tratamiento de los problemas metamatemáticos. Sus logros de esta época, combinados con sus más tempranas contribuciones a los fundamentos de la geometría, han llevado a asociar su nombre a la idea misma del método axiomático moderno. Pero como se ha tratado de mostrar en este artículo, hay que ser cuidadoso al interpretar lo que su visión de este método implicaba. En particular, nunca fue la intención de Hilbert tranformar la tradicional disicplina del álgebra en la disciplina que se ocupa de la investigación de las estructuras algebraicas en el sentido que hoy se la conoce.

**NOTAS**

[1] Este proceso es descrito en considerable detalle en la primera parte de Corry 1996.

[2] La génesis de la teoría de los ideales de Dedekind es descrita en Edwards 1980.

[3] Para una discusión más detallada del rol de la interacción entre el cuerpo y las imágenes del conocimiento en matemáticas, véase Corry 1989.

[4] Evaluaciones generales del papel de Hilbert en el desarrollo del álgebra moderna aparecen en Hasse 1932; van der Waerden 1966, 161-163; Weyl 1944, 635.

[5] Sobre Göttingen como centro mundial de la matemática, y sobre el rol de Klein y de Hilbert en promover esta centralidad, véanse Reid 1970; Rowe 1989; Parshal & Rowe 1994, 150-154.

[6] Sobre la escuela matemática de Königsberg, véase Klein 1926-27, 112-115 & 216-221.

[7] Véase Corry 1996, § 2.2.4.

[8] Max Born [1978, 81-85] describió ésto como parte de sus experiencias de estudiante en los cursos de Hilbert.

[9] Sobre la teoría de invariantes, véanse Fisher 1966, 141-156; Kline 1972, 924-932; Parshall 1989, 170-176; 1990, 12-13. Sobre las diferencias entre las escuelas inglesa y alemana de invariantes, véase Parshall 1989, 176-180.

[10] La demostración original de Hilbert apareció en Hilbert 1888-9. Una versión mejorada apareció en Hilbert 1890.

[11] Cf. Blumenthal 1935, 194; Klein 1926-27, Vol. 1, 330.

[12] Para una evaluación crítica de este juicio de Hilbert véase Parshall 1990, 11 ff.

[13] Sobre el problema catorce de Hilbert y los acontecimeintos posteriores relacionados con su solución, véase Mumford 1976.

[14] Harold Edwards publicó una serie de artículos que han contribuído enormemente a entender el desarrollo de la teoría de los números en el siglo diecinueve, y especialmente las contribuciones de Kummer, Dedekind y Kronecker. Véanse especialmente Edwards 1975, 1977, 1980, 1987.

[15] Véase Fraenkel 1914, 1916. La contribución de Frankel y su significado histórico son descritos en detalle en Corry 1996, Cap. 4.

[16] Por ejemplo, en su obituario de Hilbert, Hermann Weyl escribió (1944, 635): "No ha podido imaginarse un corte más completo que el que separa el último artículo de Hilbert en teoría de cuepros de números algebraicos de su clásico libro *Grundlagen der Geometrie*."

[17] Michael M. Toepell [1986] ha analizado en detalle el desarrollo de las ideas de Hilbert, antes de la publicación de los *Grundlagen*. En particular, él describe los cursos dictados por Hilbert en este dominio en sus años de Königsberg.

[18] Sobre las contribuciones de Cayley a este dominio véase Klein 1926-7 Vol. 1, 147-151.

[19] Para más detalles se pueden consultar Rowe 1994, 194-195; Toepell 1986, 4-6; Torreti 1978, 110-152. Sobre la obra de von Staudt: Freudenthal 1974.

[20] Sobre la escuela italiana, véase Kennedy 1981a; Tricomi 1981; Toepell 1986, 56.

[21] Citado en Toepell 1986, 1. Para una discusión sistemática de los aspectos filosóficos de la concepción axiomática temprana de Hilbert, y su relación a la de filósofos como Kant y Husserl, véase Majer 1995.

[22] Por ejemplo Schur 1901. Este problema es discutido en detalle en Schmidt 1933, 406-408. Cabe señalar que en la primera edición de los *Grundlagen,* Hilbert declaró que su intención era presentar un sistema independiente de axiomas para la geometría. En la segunda edición, esta declaración ya no aparece, siguiendo un corrección de E.H. Moore [Moore 1902] que mostró que uno de los axiomas puede ser derivado de los otros.

[23] Axioma que puede verse formulado en Hilbert 1971, 26. Este axioma no apareció en la primera edición, y en posteriores ediciones fue reformulado varias veces, aunque quedando simepre como una parte central de toda la presentación de Hilbert. Véanse Moore 1987, 109-122; Peckhaus 1990, 29-35; Toepell 1986, 254-256.

[24] Los trabajos de este tipo son descritos en detalles en Corry 1996, § 3.5.

[25] La correspondencia entre Hilbert and Frege aparece en Gabriel et al. (eds.) 1976, esp. pp. 65-68. Ella se discute en Boos 1985; Mehrtens 1990, 117 ff.; Peckhaus 1990, 40-46; Resnik 1974.

[26] Esta idea es el tema principal del reciente anánlisis contenido en Mehrtens 1990.

[27] Ejemplos típicos aparecen en Reid 1970, 60-64; Resnik 1974, 389.

[28] Este proceso es descrito en detalle en Peckhaus 1990, 23-118.

[29] El curso se ha conservado como Hilbert 1905. Existe un segundo manuscrito del mismo curso en el *Nachlass* de Hilbert, in Göttingen, (Cod. Ms. D. Hilbert 558a) anotado por Max Born. Para un análisis detallado del contenido de la segunda parte del curso, véase Peckhaus 1990, 61-75.

[30] Hilbert citó aquí los siguientes trabajos: Darboux 1875, Hamel 1905, Schimmack 1903. En otro lugar del manuscrito Hilbert citó una obra adicional: Schur 1903.

[31] Las contribuciones de Oliver Heaviside, de Josiah Willard Gibbs y de sus sucesores al desarrollo del concepto de espacio vectorial, y su estrecha conexión con ciertas teorías físicas son descritas en Crowe 1967, 150 ff.

[32] Las citas directas del manuscrito pueden verse en Corry 1996, § 3.3.

[33] La lista de las disertaciones doctorales que Hilbert supervisó aparece en Hilbert *GA* Vol. 3, 431-432.

**BIBLIOGRAFIA**

BLUMENTHAL, O. 1935. "Lebensgeschichte", en Hilbert *GA* Vol. 3, 387-429.

BOOS, W. 1985. "'The True' in Gottlob Frege's „Über die Grundlagen der Geometrie"", *Ar. Hist. E. Sci.* 34, 141-192.

BORN, M. 1978. *My Life: Recollections of a Nobel Laureate*, New York, Scribner's.

CONTRO, W. 1976. "Von Pasch bis Hilbert", *Ar. Hist. E. Sci.* 15, 283-295.

CORRY, L. 1989. "Linearity and Reflexivity in the Growth of Mathematical Knowledge", *Science in Context* 3, 409-440.

----- 1990. "Libros de Texto e Imágenes del Algebra en el Siglo XIX", *Llull* 14: 7-30.

----- 1996. *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Boston and Basel, Birkhäuser.

CROWE, M. 1967. *A History of Vector Analysis*, Notre Dame, Notre Dame University Press.

DARBOUX, G. 1875. "Sur la composition des forces en statique", *Bull. Soc. Mat.* 8, 281-288.

DEDEKIND, R. AND H. WEBER 1882. "Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen", *Jour. r. ang. Math.* 92, 181-290.

EDWARDS, H.M. 1975. "The Background of Kummer's Proof of Fermat's Last Theorem for Regular Primes", *Ar. Hist. E. Sci.* 14, 219-236.

----- 1977. *Fermat's Last Theorem - A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*, New York, Springer.

----- 1980. "The Genesis of Ideal Theory", *Ar. Hist. E. Sci.* 23, 321-378.

----- 1987. "An Appreciation of Kronecker", *Math. Int.* 9, 28-35.

FISHER, C.S. 1966. "The Death of a Mathematical Theory: A Study in the Sociology of Knowledge", *Ar. Hist. E. Sci.* 3, 137-159.

FRAENKEL, A. 1914. "Über die Teiler der Null und die Zerlegung von Ringen", *Jour. r. ang. Math.* 145, 139-176.

----- 1916. *Über gewisse Teilbereiche und Erweiterungen von Ringen*, Leipzig, Teubner.

FREUDENTHAL, H. 1974. "The Impact of von Staudt's Foundations of Geometry", en R. Cohen et al. (eds.) *For Dirk Struik*, Dordrecht, Reidel, 189-200.

GABRIEL, G. ET AL. (EDS.) 1976. *Gottlob Grege - Wissenschaftlische Briefwechsel*, Hamburg, Felix Meiner.

GORDAN, P. 1868. "Beweis, dass jede Covariante und Invariante einer binären Form eine Ganze Function mit numerische Coefficienten einer endlichen Anzahl solchen Formen ist", *Jour. r. ang. Math.* 69, 323-354.

HAMEL, G. 1905. "Über die Zusammensetzung von Vektoren", *Zeit. Math. Phys.* 49, 363-371.

HASSE, H. 1932. "Zu Hilberts algebraisch-zahlentheoretischen Arbeiten", en Hilbert *GA* Vol. 1, 528-535.

HILBERT, D. 1930. *Gesammelte Abhandlungen (GA)*, Berlin, Springer.

----- 1888-9. "Zur Theorie der algebraischen Gebilde", en *GA* Vol. 2, 176-198.

----- 1889. "Über die Endlichkeit des Invariantensystems für binäre Grundformen", *Math. Ann.* 33, 223-226. (*GA* Vol. 2, 162-164.)

----- 1890. "Über die Theorie der algebraischen Formen", *Math. Ann.* 36, 473-534. (*GA* Vol. 2, 199-257.)

----- 1893. "Über die vollen Invariantensysteme", *Math. Ann.* 42, 313-373. (*GA* Vol. 2, 287-344.)

----- 1896. "Über die Theorie der algebraischen Invarianten," en *Mathematical Papers read at the International Mathematical Congress*, Chicago 1893, 116-124. (*GA* Vol. 2, 376-383.)

----- 1897. "Die Theorie der algebraischen Zahlkörper (Zahlbericht)", *Jahr. DMV* 4, 175-546. (*GA* Vol. 1, 63-363.)

----- 1898. "Über die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper", en *GA* Vol. 1, 483-500.

----- 1899. Grundlagen der Geometrie, Leipzig, Teubner.

----- 1899a. "Über die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper", *Math. Ann.* 51, 1-127. (*GA* Vol. 1, 370-482).

----- 1900. "Über den Zahlenbegriff", *Jahr. DMV* 8, 180-184.

----- 1900a. "Theorie der algebraischen Zahlkörper", en W.F. Meyer (ed.) *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Vol. 1, Leipzig, Teubner, 675-698.

----- 1901. "Mathematische Probleme", *Archiv f. Math. u. Phys.* 1, 213-237. (*GA* Vol. 3, 290-329.)

----- 1902. "Mathematical Problems" *Bull. AMS* 8, 437-479. (Trad. inglesa por M.W. Newson de Hilbert 1901.)

----- 1905. *Logische Principien des mathematischen Denkens*, Ms. Vorlesung SS 1905, preparada por E. Helliger, Bibliothek des Mathematischen Institut der Universitäat Göttingen.

----- 1971. *Foundations of Geometry.* (Trad. inglesa por Leo Unger de la X ed. de *Grundlagen der Geometrie* (1968), revisada y aumentada por Paul Bernays), La Salle, Ill., Open Court.

----- 1971a. "Über meine Tätigkeit in Göttingen", en K. Reidemeister (ed.) *Hilbert - Gedenkenband*, Berlin/ Heidelberg/New York, Springer Verlag, 79-82.

----- 1992. *Natur und Mathematisches Erkennen: Vorlesungen, gehalten 1919-1920 in Göttingen.* Nach der Ausarbeitung von Paul Bernays (Editada y con itr. por David E. Rowe), Basel, Birkhäuser.

KENNEDY, H. 1980. *Peano - Life and Work of Giuseppe Peano*, Dordrecht, Reidel.

----- 1981. "Giuseppe Peano", *DSB* 10, 441-444.

----- 1981a. "Mario Pieri", *DSB* 10, 605-606.

KLEIN, F. 1873. "Über die sogennante Nicht-Euklidische Geometrie", *Math. Ann.* 6, 112-145.

----- 1926-7. *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, 2 Vols., ed. por R. Courant y O. Neugebauer, Berlin, Springer. (Chelsea reprint, New York, 1948.)

KLINE, M. 1972. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York, Oxford University Press.

MAJER, U. 1995. "Geometry, Intuition and Experience: From Kant to Husserl", *Erkenntnis* 42, 261-285.

MEHRTENS , H. 1990. *Moderne - Sprache - Mathematik*, Frankfurt, Suhrkamp. Mehrtens 1990

MEYER, F. 1890. "Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie", *Jahr. DMV* 1, 79-292.

MOORE, E.H. 1902. "Projective Axioms of Geometry", *Trans. AMS* 3, 142-158.

MOORE, G.H. 1987. "A House Divided Against Itself: the Emergence of First-Order Logic as the Basis for Mathematics", en E.R. Phillips (ed.) *Studies in the History of Mathematics*, MAA Studies in Mathematics, 98-136.

MUMFORD, D. 1976. "Hilbert's Fourteenth Problem - The Finite Generation of Sub-rings such as Rings of Invariants", en F.E. Borwder *Mathematical Problems Arising from Hilbert Problems*, Proceeding of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 28, (1976) Providence, AMS.431-444.

NAGEL, E. 1939. "The Formation of Modern Conceptions of Formal Logic in the Development of Geometry", *Osiris* 7, 142-224.

PARSHALL, K.H. 1989. "Towards a History of Nineteenth-Century Invariant Theory", en D.E. Rowe & J. McCleary (eds.) (1989), Vol. 1, 157-206.

----- 1990. "The One-Hundredth Anniversary of the Death of Invariant Theory?", *Math. Int.* 12, 10-16.

PARSHALL, K.H. AND D.E. ROWE 1994. *The Emergence of the American Mathematical Research Community, 1876-1900: J.J. Sylvester, Felix Klein, and E.H. Moore*, Providence, AMS/LMS.

PASCH, M. 1882. *Vorlesungen über neuere Geometry*, Leipzig, Teubner.

PECKHAUS, V. 1990. *Hilbertprogramm und Kritische Philosophie. Des Göttinger Modell interdisziplinärer Zusammenarbeit zwischen Mathematik und Philosophie,* Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht.

------ 1994. "Logic in Transition: The Logic Calculi of Hilbert (1905) and Zermelo (1908)", en D. Prawitz et al. (eds.) *Logic and Philosophy of Science in Uppsala*, Dordrecht, Kluwer.

REID, C. 1970. *Hilbert*, Berlin/New York, Springer.

RESNIK, M. 1974. "The Frege-Hilbert Controversy", *Philosophy and Phenomenological Research* 34, 386-403.

ROWE, D.E. 1989. "Klein, Hilbert, and the Göttingen Mathematical Tradition", *Osiris* 5, 186-213.

----- 1994. "The Philosophical Views of Klein and Hilbert", en Sasaki et al. (eds.) (1994), 187-202.

ROWE D.E. AND J. MCCLEARY (EDS.) 1989. *The History of Modern Mathematics*, 2 Vols., San Diego, Academic Press.

RÜDENBERG, L. AND H. ZASSENHAUS (EDS.) 1973. *Hermann Minkowski - Briefe an David Hilbert*, Berlin/New York, Springer.

SASAKI, CH. ET AL. (EDS.) 1994. *The Intersection of History and Mathematics*, Basel/Berlin/Boston, Birkhäuser.
SCHIMMACK, R. 1903. "Ueber die axiomatische Begründung der Vektoraddition", *Gött. Nachrichten* 1903, 317-325.
SCHMIDT, E. 1933. "Zu Hilberts Grundlegung der Geometrie", en Hilbert *GA* Vol. 2, 404-414.
SCHUR, F. 1901. "Über die Grundlagen der Geometrie", *Math. Ann.* 55, 265-292.
1903 "Über die Zusammensetzung von Vektoren", *Zeit. Math. Phys.* 49, 352-361.
SEGRE, M. 1994. "Peano's Axioms in their Historical Context", *Ar. Hist. E. Sci.* 48, 201-342.
STUDY, E. 1933. *Einleitung in die Theorie der Invarianten*, Braunschweig, Vieweg.
TOEPELL, M.M. 1986. *Über die Entstehung von David Hilberts „Grundlagen der Geometrie"*, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht.
TOEPLITZ, O. 1922. "Der Algebraiker Hilbert", *Die Naturwissenschaften* 10, 73-77.
TORRETI, R. 1978. *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Dordrecht, Reidel.
TRICOMI, F.G. 1981. "Giuseppe Veronese", *DSB* 11, 623.
VERONESE, G. 1891. *Fondamenti di geometria a piu dimensioni e a piu specie di unitá rettilinee, esposti in forma elementare*, Padova, Tipografia del Seminario.
WAERDEN, B.L. VAN DER. 1930. *Moderne Algebra*, 2 vols., Berlin, Springer.
----- 1933. "Nachwort zu Hilberts algebraischen Arbeiten", en Hilbert *GA* Vol. 2, 401-403.
----- 1975. "On the Sources of my Book Moderne Algebra", *Hist. Math.* 2, 31-40.
WEBER, H. 1893. “Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie”, *Math. Ann.* 43, 521-549.
WEYL,H. 1944. "David Hilbert and his Mathematical Work", *Bull. AMS* 50, 612-654.